E.N.S.I. PHYSIQUE-MECANIQUE Option TA 1981

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (4 h)

N.B. — *On rappelle que l'usage des calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé.*

K désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathfrak{M}_n(K)$ l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K, avec $n \geqslant 2$. I désigne la matrice unité de $\mathfrak{M}_n(K)$ et **O** désigne selon le cas la matrice nulle de $\mathfrak{M}_n(K)$ ou le vecteur nul de K^n. Si $A \in \mathfrak{M}_n(K)$, on note $a_{i,j}$ le coefficient de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne de A. Enfin, on note $(X)_i$ la $i^{ème}$ composante d'un vecteur X de K^n.

Dans tout le problème, on utilisera la même lettre pour désigner un vecteur de K^n et la matrice colonne de ses coordonnées par rapport à la base canonique de K^n.

Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $Z_0 \in \mathbb{R}^n$, on définit une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par la relation de récurrence :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^* \qquad Z_p = A\, Z_{p-1}$$

et l'on va étudier pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ les rapports :

$$(r_p)_i = \frac{(Z_p)_i}{(Z_{p-1})_i} \qquad \text{quand ils seront définis.}$$

I. ***Exemple numérique en dimension 3.***

On choisit $\quad A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -81 & 30 & 26 \\ -86 & 35 & 26 \\ -82 & 30 & 27 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad Z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calculer les composantes du vecteur Z_p pour $1 \leqslant p \leqslant 4$, puis les rapports $(r_p)_i$ pour $2 \leqslant p \leqslant 4$ et $1 \leqslant i \leqslant 3$.

On présentera les résultats sous forme d'un *tableau en ne conservant que 4 décimales.*

II. ***Explication théorique du*** **I.**

On reprend dans cette partie la matrice du I.

1° Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 de A et les vecteurs propres associés V_1, V_2, V_3. On remarquera que l'une des valeurs propres est égale à 1. On prendra $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$ et on choisira la première composante de chaque vecteur propre égale à 1.

2° *a.* Pour $p \in \mathbb{N}^*$, calculer A^p.

b. En déduire qu'il existe 3 matrices M_1, M_2, M_3 de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^* \qquad A^p = (\lambda_1)^p M_1 + (\lambda_2)^p M_2 + (\lambda_3)^p M_3 .$$

3° On choisit un vecteur $Z_0 \in \mathbb{R}^3$. Exprimer Z_p en fonction de A et Z_0.

4° On suppose dans cette question que $M_1 Z_0 \neq \mathbf{O}$.

a. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall\, p \geqslant p_0, \qquad \forall\, i \in \{1, 2, 3\} \qquad (Z_p)_i \neq 0$$

b. En déduire que, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\lim\limits_{p \to \infty} (r_p)_i$ existe et a une valeur λ indépendante de i.

c. Montrer que, quand $p \to \infty$, le vecteur $\frac{1}{\lambda^p} Z_p$ a une limite W qu'on précisera.

5° Que deviennent les résultats précédents :

a. Si $M_1 Z_0 = \mathbf{O}$ et $M_2 Z_0 \neq \mathbf{O}$?

b. Si $M_1 Z_0 = M_2 Z_0 = \mathbf{O}$ et $M_3 Z_0 \neq \mathbf{O}$?

.../...

III. *Etude de la méthode en dimension* $n \geqslant 2$.

Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note D_k la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$d_{k,k} = 1 \qquad \text{et} \qquad d_{i,j} = 0 \qquad \text{si} \quad (i,j) \neq (k,k).$$

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Soit $(V_1, \ldots, V_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres (distinctes ou non) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à la base $(V_1, \ldots, V_n)$.

1° Montrer qu'il existe dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices $M_1, \ldots, M_n$ telles que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^* \qquad A^p = (\lambda_1)^p M_1 + \ldots + (\lambda_n)^p M_n$$

On exprimera chaque matrice M_j à l'aide de P et de D_j.

2° Calculer $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$ ainsi que $M_i M_j$ pour $(i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$. En déduire que la famille $(M_1, \ldots, M_n)$ est libre dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Dans toute la suite du III, *on suppose que :* $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$

3° Montrer que $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

4° On choisit un vecteur $Z_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $M_1 Z_0 \neq \mathbf{0}$, puis un indice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $(M_1 Z_0)_i \neq 0$.

a. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall\, p \geqslant p_0 \quad (Z_p)_i \neq 0$. En déduire que $\lim_{p \to \infty} (r_p)_i$ existe et vaut λ_1.

b. Déterminer $W = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{(\lambda_1)^p} Z_p$ et montrer que W est un vecteur propre de A.

IV. *Application à un problème de vibrations.*

On considère un système mécanique (arbre portant 4 volants) entraîné par un moteur tournant en principe à vitesse constante mais où subsiste en réalité une légère vibration parasite. L'étude des vibrations de l'arbre conduit au système différentiel du 2° ordre suivant :

$$\begin{pmatrix} f_1'' \\ f_2'' \\ f_3'' \\ f_4'' \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c\cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A = \beta \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2\alpha^2 & 2\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Les fonctions inconnues sont les fonctions $t \longmapsto f_i(t)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ c, α, β, ω sont des constantes strictement positives et $\varphi \in \mathbb{R}$.

1° Soit :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A' = Q^{-1} A Q$$

a. Montrer que A' est symétrique et en déduire que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^4$ par :

.../...

$$q(X) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4)\, A' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Décomposer $q(X)$ en carrés et en déduire que les 4 valeurs propres de A sont strictement positives.

2° Soit (V_1, V_2, V_3, V_4) une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de A associés respectivement aux 4 valeurs propres (distinctes ou non) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base (V_1, V_2, V_3, V_4). On pose :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, la fonction g_i est solution de l'équation différentielle :

(E_i) $$y'' + \lambda_i y = \gamma_i \cos \omega t + \delta_i \sin \omega t$$

où γ_i et δ_i sont deux constantes réelles.

b. Montrer que l'une au moins des 8 constantes $\gamma_1, \ldots, \gamma_4, \delta_1, \ldots, \delta_4$ est non nulle.

3° Résoudre l'équation (E_i) en étudiant les 2 cas :

$$\omega^2 \neq \lambda_i \qquad \text{et} \qquad \omega^2 = \lambda_i$$

Dans toute la fin du problème, on admettra que les valeurs propres de A sont distinctes et on prendra

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$$

4° Montrer que, si $\omega^2 \in]0, \lambda_4[$, les 4 fonctions f_i sont bornées sur $[0, \infty[$, et que, si $\omega^2 = \lambda_4$, l'une au moins des fonctions f_i est en général non bornée sur $[0, \infty[$.

5° Montrer que A' est inversible et déterminer les valeurs propres $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ de A'^{-1} en fonction des λ_i (on prendra $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4$).

6° On choisit maintenant $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et on pose $A' = \beta A''$. Calculer A''^{-1} en résolvant le système $A'' X = Y$

7° Appliquer à la matrice A''^{-1} la méthode du I avec :

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant p \leqslant 4$$

On admettra que l'on obtient ainsi une valeur approchée de $\beta\mu_4$. En déduire l'intervalle $]0, \omega_0[$ dans lequel on doit choisir ω pour éviter le phénomène de résonance (solutions f_i non bornées).

XXXXXXX

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail